Chapitre E5 – Filtrage linéaire

L'électronique est la science du traitement des signaux électriques, dont un des problèmes fondamentaux est d'extraire l'information utile d'un signal issu d'un capteur ou reçu d'un interlocuteur. Sur l'antenne de réception d'un téléphone portable par exemple, de multiples signaux se superposent : certains sont des bruits générés par l'environnement, d'autres concernent des communications dont une seule est destinée à être reçue par l'utilisateur du téléphone. Une des tâches importantes en électronique des télécommunications consiste donc à séparer la partie utile, celle qui transporte l'information, de la partie parasite.

I) Filtrage

1) Fonction de transfert

Un filtre est un quadripôle qui modifie le contenu d'un signal d'entré.

L'étude des filtres sera toujours faite sur une sortie ouvert : aucun courant ne sort du filtre ($i_s = 0$).

Soit un signal d'entré sinusoïdal :

$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \phi_e) \qquad \leftrightarrow \qquad \underline{e}(t) = \underline{E_m}\ e^{j\omega t} \quad \text{avec :} \quad \underline{E_m}(\omega) = E_m\ e^{j\phi_e}$$

En régime établi, le signal de sortie est également sinusoïdal :

$$s(t) = S_m \cos(\omega t + \phi_s) \qquad \leftrightarrow \qquad \underline{s}(t) = \underline{S_m}\ e^{j\omega t} \quad \text{avec :} \quad \underline{S_m}(\omega) = S_m\ e^{j\phi_s}$$

On appelle **fonction de transfert** du filtre :

$$\boxed{\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{\underline{S_m}(\omega)}{\underline{E_m}(\omega)} = \frac{S_m}{E_m}\ e^{j(\phi_s - \phi_e)}}$$

Le module de $\underline{H}$ nous renseigne sur le rapport des amplitude entre la sortie et l'entrée.

$$|\underline{H}| = \frac{S_m}{E_m}$$

L'argument de $\underline{H}$ nous renseigne sur le déphasage entre la sortie et l'entrée.

$$\arg(\underline{H}) = \phi_s - \phi_e$$

Connaître $\underline{H}$, c'est connaître le signal de sortie :

$$s(t) = E_m \times |\underline{H}|\ \cos(\omega t + \phi_e + \arg(\underline{H}))$$

2) Diagramme de Bode

On appelle **gain** du filtre le module de la fonction de transfert :

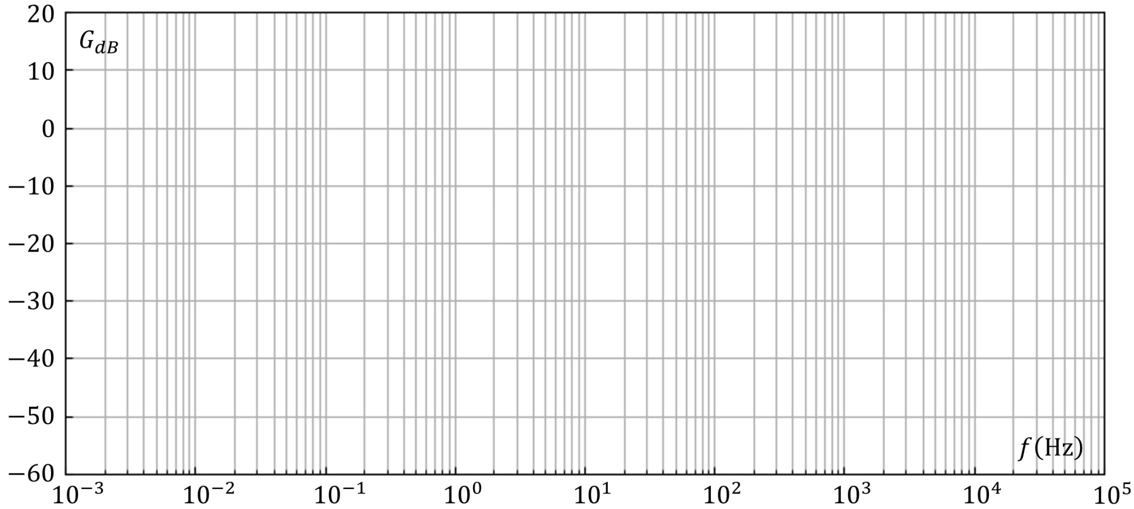
$$G = |\underline{H}| = \frac{S_m}{E_m} = 10^{G_{\mathrm{dB}}/20}$$

On appelle **gain en décibel** du filtre :

$$G_{\mathrm{dB}} = 20\ \log(|\underline{H}|)$$

G	1	10	$1/10$	$1/100$	$1/\sqrt{2}$
G_{dB} en dB	0	20	-20	-40	-3

On appelle **diagramme de Bode en amplitude** le graphe de $G_{\mathrm{dB}}(\omega)$ et **diagramme de Bode en phase** le graphe de $\phi(\omega)$ où $\phi = \arg(\underline{H})$. L'abscisse ω est tracée en échelle logarithmique.



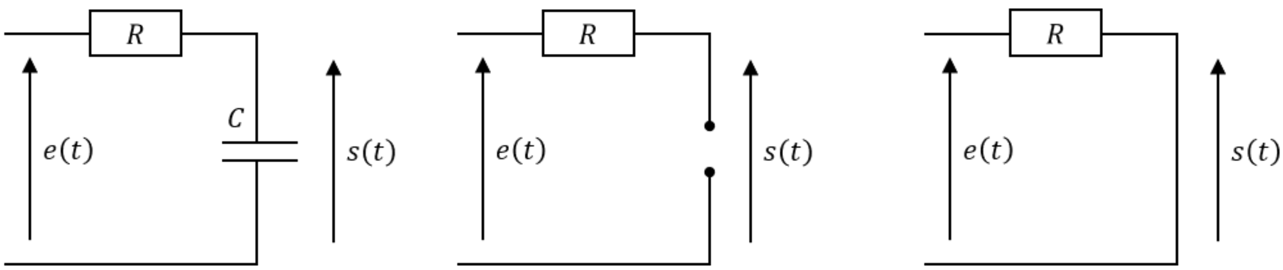
Un saut de $\times 10$ s'appelle une **décade**.

II) Filtre passe-bas d'ordre 1

On considère le filtre RC où la sortie est prise sur le condensateur.

1) Comportement BF et HF

Filtre **Comportement BF** **Comportement HF**



$s(t) = e(t)$ $s(t) = 0$

En BF : une loi des mailles donne immédiatement $s(t) = e(t)$

En HF : tension aux bornes d'un fil $s(t) = 0$

Ce filtre laisse passer les BF et coupe les HF. C'est un filtre dit **passe-bas**.

2) Fonction de transfert

On effectue un pont diviseur de tension.

$$\underline{s} = \frac{\underline{Z_C}}{R + \underline{Z_C}}\,\underline{e} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C}\,\underline{e} = \frac{1}{1 + j\omega RC}\,\underline{e}$$

On en déduit :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + jx} \quad \text{avec :} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}}$$

Ce filtre est un filtre d'ordre 1 car son dénominateur est un polynôme en ω d'ordre 1.

3) Diagramme de Bode

Commençons par tracer le diagramme de Bode asymptotique. Méthode :

- Déterminer les asymptotes en BF ($x \ll 1$) et HF ($x \gg 1$)
- Extrapoler les asymptotes jusqu'en $x = 1$

Puis, on trace le diagramme de Bode réel : tracer une courbe reliant les asymptotes BF et HF en passant par la valeur exacte de $\underline{H}$ pour $x = 1$.

Fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jx}$$

Comportement BF :

$$\underline{H} \simeq 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_{\text{dB}} = 20\,\log(|\underline{H}|) = 0 \\ \phi = \arg(\underline{H}) = 0 \end{cases}$$

Comportement HF :

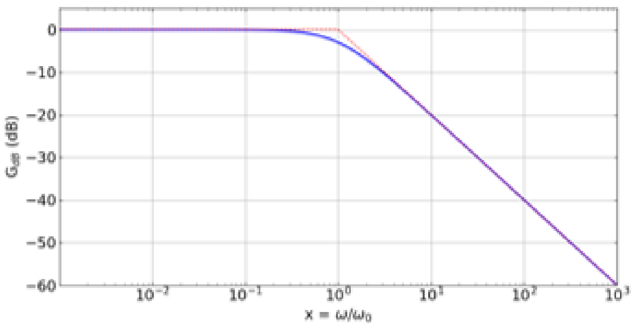
$$\underline{H} \simeq \frac{1}{jx} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_{\text{dB}} = 20\,\log(|\underline{H}|) = 20\,\log\left(\dfrac{1}{x}\right) = -20\,\log(x) \\ \phi = \arg(\underline{H}) = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

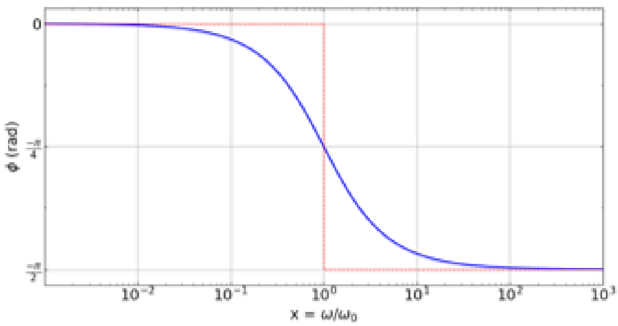
$G_{\text{dB}} = -20\,\log(x)$ correspond à une pente de -20 dB/décade

Cas où $x = 1$:

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_{\text{dB}} = 20\,\log(|\underline{H}|) = 20\,\log\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3\text{ dB} \\ \phi = \arg\left(\dfrac{1}{1+j}\right) = -\arg(1+j) = -\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

On en déduit les diagrammes de Bode réel et asymptotique.





On appelle **pulsation de coupure** à -3 dB la ou les pulsation ω_c où :

$$\boxed{G_{\text{dB}}(\omega_c) = \max(G_{\text{dB}}) - 3\text{ dB}}$$

On appelle **bande passante** du filtre l'intervalle de pulsation ω vérifiant :

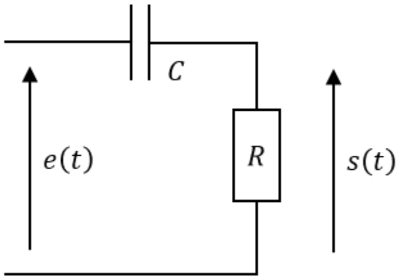
$$\boxed{G_{\text{dB}}(\omega) \geq \max(G_{\text{dB}}) - 3\text{ dB}}$$

III) Filtre passe-haut d'ordre 1

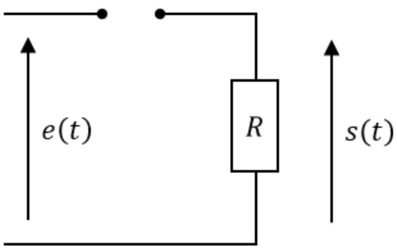
On considère le filtre RC où la sortie est prise sur la résistance.

1) Comportement BF et HF

Filtre

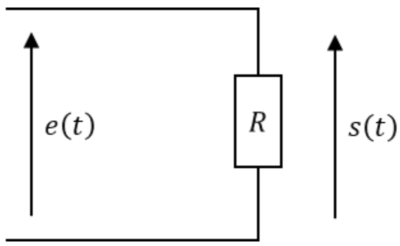


Comportement BF



$s(t) = 0$

Comportement HF



$s(t) = e(t)$

En BF : loi d'Ohm $s(t) = 0$

En HF : on a immédiatement $s(t) = e(t)$

Ce filtre laisse passer les HF et coupe les BF. C'est un filtre dit **passe-haut**.

2) Fonction de transfert

On effectue un pont diviseur de tension.

$$\underline{s} = \frac{R}{R + \underline{Z_C}}\,\underline{e} = \frac{R}{R + 1/j\omega C}\,\underline{e} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}\,\underline{e}$$

On en déduit :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{jx}{1 + jx} \quad \text{avec :} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}}$$

Ce filtre est un filtre d'ordre 1 car son dénominateur est un polynôme en ω d'ordre 1.

3) Diagramme de Bode

<u>Fonction de transfert</u> :

$$\underline{H} = \frac{jx}{1 + jx}$$

<u>Comportement BF</u> :

$$\underline{H} \simeq jx \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_{\text{dB}} = 20\,\log(|\underline{H}|) = 20\,\log(x) \\ \phi = \arg(\underline{H}) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$G_{\text{dB}} = 20\,\log(x)$ correspond à une pente de 20 dB/décade

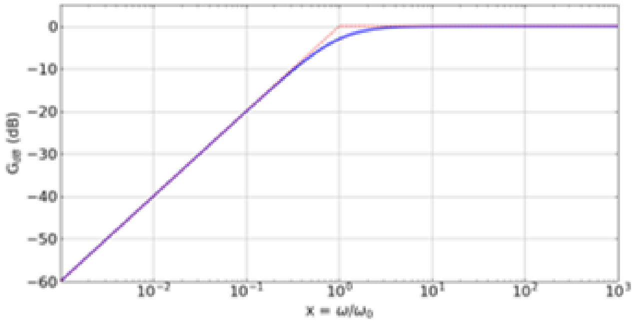
<u>Comportement HF</u> :

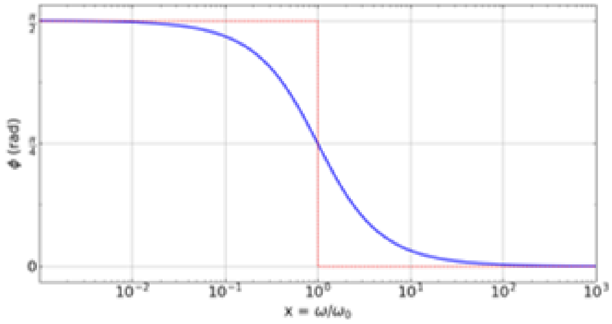
$$\underline{H} \simeq \frac{jx}{jx} = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_{\text{dB}} = 20\,\log(|\underline{H}|) = 0 \\ \phi = \arg(\underline{H}) = 0 \end{cases}$$

<u>Cas où $x = 1$</u> :

$$\underline{H} = \frac{j}{1 + j} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_{\text{dB}} = 20\,\log(|\underline{H}|) = 20\,\log\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3\text{ dB} \\ \phi = \arg\left(\dfrac{j}{1 + j}\right) = \arg(j) - \arg(1 + j) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

On en déduit les diagrammes de Bode réel et asymptotique.





IV) Signaux périodique

1) Valeur moyenne, valeur efficace

Soit un signal $s(t)$ T-périodique. On appelle valeur moyenne du signal :

$$\boxed{\langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\, dt \qquad \forall\ t_0 \in \mathbb{R}}$$

C'est la valeur mesurée par un multimètre en mode DC.

On appelle valeur efficace ou **valeur rms** (pour « root mean square ») du signal :

$$\boxed{S_{\text{eff}} \text{ ou } S_{\text{rms}} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} s^2(t)\, dt} \qquad \forall\ t_0 \in \mathbb{R}}$$

C'est la valeur mesurée par un multimètre en mode AC.

Application : cas du signal sinusoïdal

$$s(t) = S_m \cos(\omega t)$$

Valeur moyenne :

$$\langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s(t)\, dt = \frac{S_m}{T} \int_0^T \cos(\omega t)\, dt = \frac{S_m}{\omega T} \Big[\sin(\omega t) \Big]_0^T = \frac{S_m}{\omega T} \Big(\sin(\omega T) - \sin(0) \Big)$$

Or, $\omega T = 2\pi$. On en déduit :

$$\langle s(t) \rangle = \frac{S_m}{\omega T} \Big(\sin(2\pi) - \sin(0) \Big) = 0$$

Valeur efficace :

$$S_{\text{eff}} = S_m \sqrt{\langle \cos^2(\omega t) \rangle}$$

Or, on rappelle que :

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

Ainsi,

$$S_{\text{eff}} = S_m \sqrt{\left\langle \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2} \right\rangle} = S_m \sqrt{\frac{1}{2} + 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{S_{\text{eff}} = \frac{S_m}{\sqrt{2}}}$$

Application n°2 : TD, Calcul d'une valeur efficace.

2) Décomposition en série de Fourier

Joseph Fourier (mathématicien et physicien français du XIX$^{\text{ème}}$ siècle) a montré que tout signal T-périodique peut s'écrire comme la somme :

$$\boxed{s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cos(n\omega t + \phi_n) \quad \text{avec :} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}}$$

On parle de **décomposition en série de Fourier** d'un signal périodique.

Ainsi,

$$s(t) = \underbrace{S_0}_{\substack{\text{Composante}\\ \text{continue}}} + \underbrace{S_1 \cos(\omega t + \phi_1)}_{\substack{\text{Fondamental}\\ \text{Harmonique de rang 1}}} + \underbrace{S_2 \cos(2\omega t + \phi_2)}_{\text{Harmonique de rang 2}} + \ \dots \ + \underbrace{S_n \cos(n\omega t + \phi_n)}_{\text{Harmonique de rang } n}$$

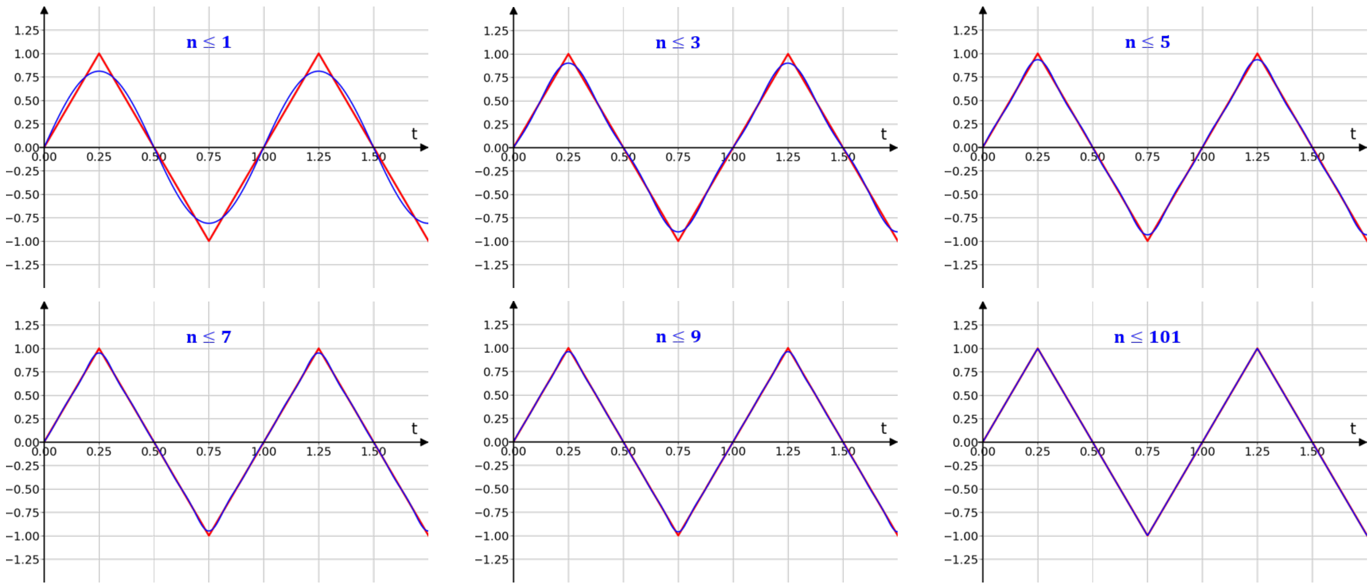
Le signal est T-période. Sa fréquence vaut $f_1 = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$, appelée **fréquence fondamentale** du signal. Il s'agit de la fréquence du fondamental. Les harmoniques ont des fréquences $f_n = n \times f_1$ multiples de la fréquence fondamentale.

S_n est l'amplitude et ϕ_n la phase de l'harmonique de rang n.

<u>Exemples</u> :

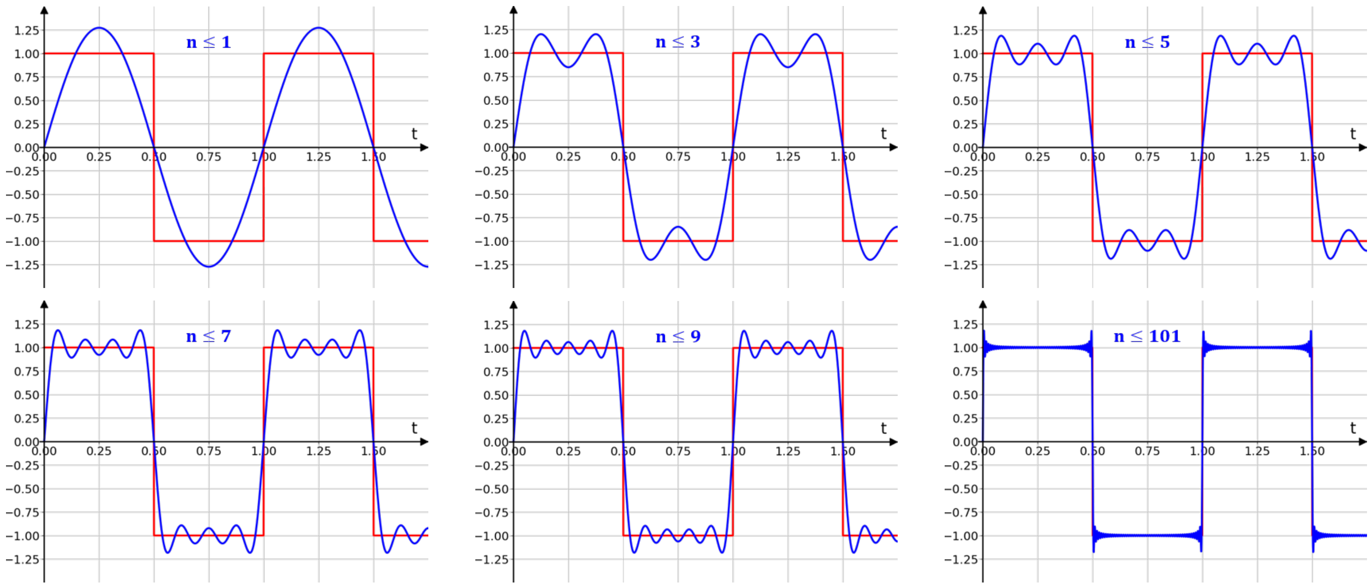
Signal triangle d'amplitude 1 :

$$\begin{aligned} s_{\text{tri}}(t) &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin((2n+1)\,\omega t) \\ &= \frac{8}{\pi^2} \cos\Big(\omega t - \frac{\pi}{2}\Big) - \frac{8}{9\pi^2} \cos\Big(3\omega t + \frac{\pi}{2}\Big) + \frac{8}{25\pi^2} \cos\Big(5\omega t - \frac{\pi}{2}\Big) - \quad \dots \end{aligned}$$



Signal créneau d'amplitude 1 :

$$\begin{aligned} s_{\text{cre}}(t) &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)\,\omega t) \\ &= \frac{4}{\pi} \cos\Big(\omega t - \frac{\pi}{2}\Big) + \frac{4}{3\pi} \cos\Big(3\omega t - \frac{\pi}{2}\Big) + \frac{4}{5\pi} \cos\Big(5\omega t - \frac{\pi}{2}\Big) + \quad \dots \end{aligned}$$

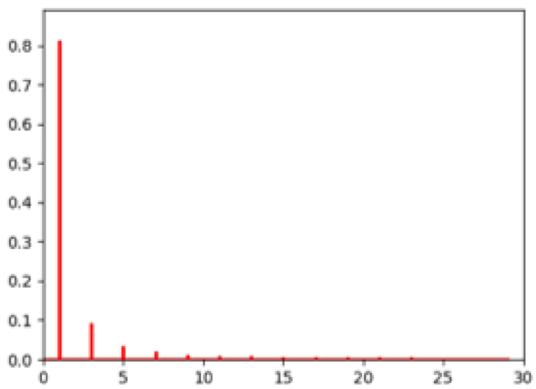


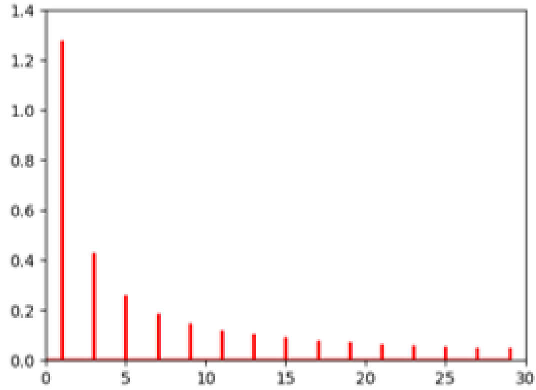
3) Spectre d'un signal périodique

Le **spectre** d'un signal est la décomposition de ce signal en l'ensemble des fréquences qui le compose. Il s'agit donc de la décomposition en série de Fourier du signal.

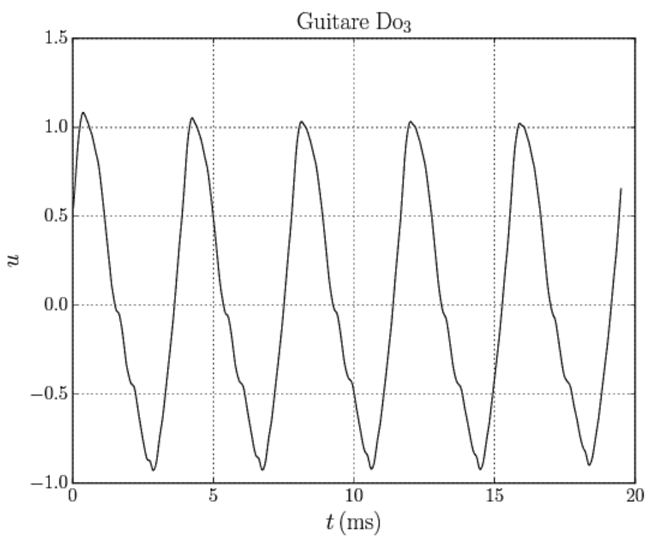
Application :

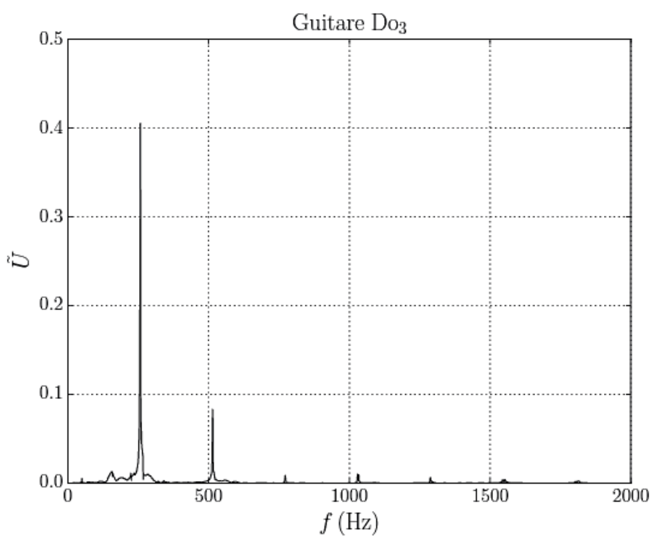
Spectre en amplitude du signal triangle (gauche) et du signal créneau (droite)





Signal et spectre en amplitude du do^3 d'un guitare





Application : TD, Représentation spectrale

V) Action d'un filtre sur un signal périodique

1) Détermination du signal de sortie

On rappelle l'action d'un filtre sur un signal périodique :

On appelle **fonction de transfert** du filtre (cf. I.1) :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{s(t) = E_m \times |\underline{H}(\omega)| \ \cos(\omega t + \phi_e + \arg(\underline{H}(\omega)))}$$

Pour déterminer l'action d'un filtre sur un signal périodique quelconque, il faut :
- écrire la décomposition en série de Fourier des signaux d'entrée et de sortie ;
- appliquer la relation précédente pour chaque harmonique.

Signal d'entrée :

$$e(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \ \cos(\omega_n t + \phi_{e,n}) \quad \text{avec :} \quad \omega_n = n \times \omega_1$$

On en déduit le signal de sortie :

$$s(t) = \underbrace{E_0 \times \underline{H}(\omega = 0)}_{= S_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{E_n \times \left|\underline{H}(\omega = \omega_n)\right|}_{= S_n} \ \cos\Big(\omega_n t + \underbrace{\phi_{e,n} + \arg(\underline{H}(\omega = \omega_n))}_{= \phi_{s,n}}\Big)$$

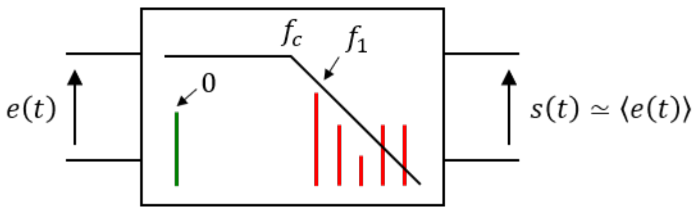
Pour comprendre graphiquement l'action d'un filtre sur un signal, on superpose le diagramme de Bode en amplitude et le spectre en amplitude du signal d'entrée. On peut alors en déduire le spectre du signal de sortie.

Application : TD, Détermination graphique du signal de sortie

2) Filtre moyenneur

Propriété :

Tout filtre passe-bas dont la fréquence de coupure $f_c \ll f_1$ la fréquence fondamentale d'un signal d'entrée, permet de récupérer en sortie la valeur moyenne de ce signal.



Application :

Soit un signal créneau de fréquence $f_1 = 10$ kHz oscillant entre 0 et 10 V. On envoie ce signal sur un filtre passe-bas d'ordre de fréquence de coupure $f_c = 1$ Hz.

En BF, $G_{\text{dB}} = 0$ dB, donc l'amplitude de la composante continue ($E_0 = 5$ V) est inchangée ($S_0 = 5$ V).

Le fondamental (10 kHz) se situe 4 décades au dessus de la fréquence de coupure (1 Hz). Ordre un filtre passe-bas atténue à -20 dB/dec. Le fondamental est donc atténué de 80 dB, ie. que son amplitude (E_1) est divisée par $10^{80/20} = 10^4$: $S_1 = \dfrac{E_1}{10\,000}$. On peut donc négliger ce terme devant le fondamental. Les autres harmoniques seront encore plus atténués.

On en déduit :

$$s(t) \simeq S_0 = E_0 = \langle e(t) \rangle$$

3) Filtre intégrateur

Un filtre intégrateur est un filtre dont la fonction de transfert vaut : $\underline{H}(\omega) \propto \dfrac{1}{j\omega}$

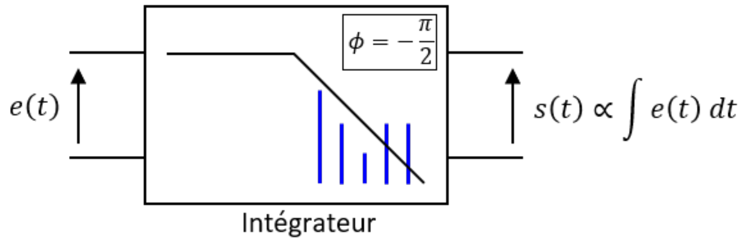
En effet,

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} \propto \frac{1}{j\omega} \quad \Rightarrow \quad \underline{s}(t) \propto \frac{\underline{e}(t)}{j\omega} \quad \Rightarrow \quad \boxed{s(t) \propto \int e(t)\,dt}$$

Graphiquement, cela signifie que G_{dB} est une droite de pente -20 dB/dec et que $\phi = -\frac{\pi}{2}$.

Propriété :

Lorsque l'ensemble du spectre de $e(t)$ est contenu dans une pente de -20 dB/dec, alors $s(t)$ est proportionnelle à l'intégrale de $e(t)$.



4) Filtre dérivateur

Un filtre dérivateur est un filtre dont la fonction de transfert vaut : $\underline{H}(\omega) \propto j\omega$

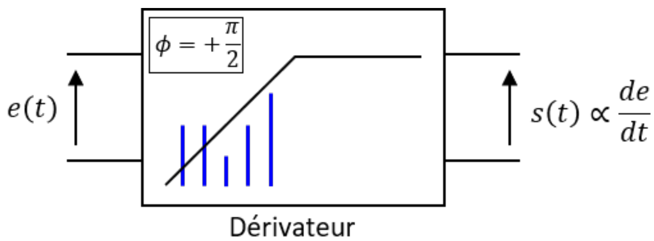
En effet,

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} \propto j\omega \quad \Rightarrow \quad \underline{s}(t) \propto j\omega\ \underline{e}(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{s(t) \propto \frac{de}{dt}}$$

Graphiquement, cela signifie que G_{dB} est une droite de pente $+20$ dB/dec et que $\phi = +\frac{\pi}{2}$.

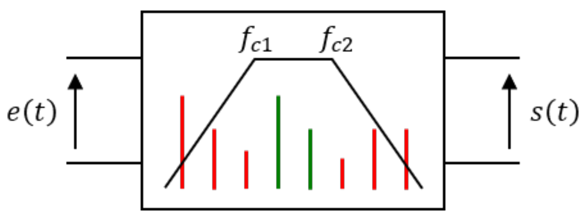
Propriété :

Lorsque l'ensemble du spectre de $e(t)$ est contenu dans une pente de $+20$ dB/dec, alors $s(t)$ est proportionnelle à la dérivée de $e(t)$.



5) Filtre passe-bande

À l'aide d'un filtre d'ordre 2, il est possible de créer un filtre passe-bande. Il s'agit d'un filtre qui ne laisse passer de les fréquences comprises entre deux fréquences de coupures.



Il la bande passante est très étroite est centrée sur l'un des harmonique, alors seul cet harmonique est conservé (les autres sont coupés). Le signal de sortie est donc sinusoïdal.